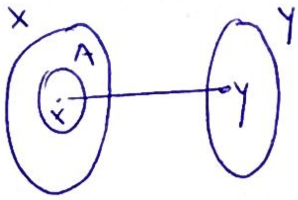
5^o Θεωρία συνόλων

22/11/2019

$\sigma \subseteq X \times Y$ σχέση από το X στο Y

$f \subseteq X \times Y : \forall x \in X \ \exists ! y \in Y, \ x f y$

$y = f(x), \ x \in X$



$f(A) = \{ f(x), x \in A \} \subseteq Y$

$A \subseteq X$

X, Y σύνολα.

$Y^X = \{ f : X \to Y : f \text{ συνάρτηση} \} = \{ f \subseteq X \times Y : (\forall x \in X)(\exists ! y \in Y) : x f y \}$

Είναι σύνολο από το αξίωμα προσδιορισμού.

ΑΣΚΗΣΗ

ΝΔΟ $\forall x \in \mathbb{N}, \ x \subseteq \mathbb{N}$ (με επαγωγή)

Λύση

$\alpha = \{ x \in \mathbb{N} : x \subseteq \mathbb{N} \}$

ΔΟ $(\alpha \subseteq \mathbb{N})$, α Επαγωγικό $\Rightarrow \alpha = \mathbb{N}$

$\emptyset = 0 \in \alpha$

$x \in \alpha \Rightarrow x^+ \in \alpha$

$\Downarrow$

$\left. \begin{array}{l} x \subseteq \mathbb{N} \\ x \in \mathbb{N} \end{array} \right\} x \cup \{x\} = x^+ \subseteq \mathbb{N}$

$\mathbb{N}$ ε-μεταβατικό σύνολο

$\forall n \in \mathbb{N}$

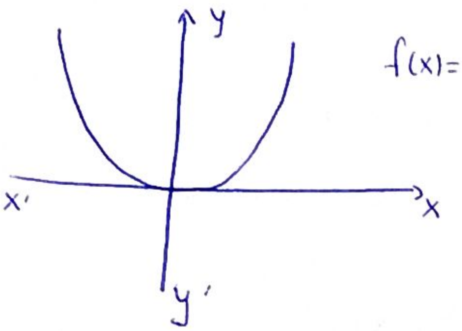
$\forall x \in n \Rightarrow x \subseteq n$ $\quad n$-μεταβατικό $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ορισμός A, B σύνολα

$A \cong B$ (ισοπληθικό) $\overset{\text{op}}{\Longleftrightarrow}$ $f: A \to B$ 1-1 αν-ν $\forall\, x_1, x_2 \in A,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

και επί αν $\forall y \in B\ \exists x \in A : f(x) = y$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ



$f(x) = x^2$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f: \mathbb{R} \to [0, +\infty)$

$f[\mathbb{R}] = \{ f(x), x \in \mathbb{R} \} = [0, +\infty)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

A σύνολο

$\{0,1\}^A = \{ f: A \to \{0,1\},\ f \text{ συνάρτηση} \}$

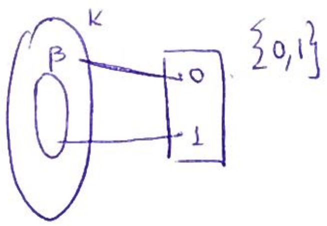
ΝΔΟ $P(A) \cong \{0,1\}^A$

Πρέπει να κατασκευάσουμε μια απεικόνιση $T: P(A) \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} \{0,1\}^A$

Θεωρούμε $B \subseteq A$, δηλ. $B \in P(A)$

$T(B): A \to \{0,1\}$

$T(B) = \mathcal{X}_B$ όπου $\mathcal{X}_B(x) = \begin{cases} 1, & x \in B \\ 0, & x \in A \setminus B \end{cases}$



1) ΘΔΟ $T: P(A) \to \{0,1\}$ είναι 1-1.

Έστω σύνολα $B, B' \in P(A)$ με $B \neq B'$

ΘΔΟ $\underset{T(B)}{\mathcal{X}_B} \neq \underset{T(B')}{\mathcal{X}_{B'}}$, δηλ $\exists x \in A$ ώστε $\mathcal{X}_B(x) \neq \mathcal{X}_{B'}(x)$

$(B = B' \Longleftrightarrow B \subseteq B' \text{ και } B' \subseteq B)$

$(B \neq B' \Longleftrightarrow \underset{①}{B \not\subseteq B'} \text{ ή } \underset{②}{B' \not\subseteq B}$ $\Longleftrightarrow$ Έστω $B \neq B'$ και πιο συγκεκριμένα $B \not\subseteq B'$ (δεν ισχύει η ①)

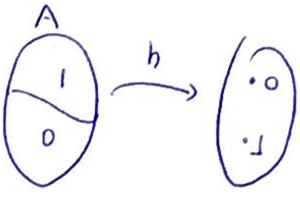
ΘΔΟ $\mathcal{X}_B \neq \mathcal{X}_{B'}$.

$B \not\subseteq B' \Rightarrow \exists\, x \in A$ με $x \in B$, $x \notin B'$

$\left.\begin{array}{l} \mathcal{J}_B(x) = 1 \text{ αφού } x \in B \\ \mathcal{J}_{B'}(x) = 0 \text{ αφού } x \notin B' \end{array}\right\} \mathcal{J}_B \neq \mathcal{J}_{B'} \Rightarrow T(B) \neq T(B')$ όταν $B \neq B'$ άρα T 1-1

2) Θδο η $T: P(A) \to \{0,1\}^A$ είναι επί:

Θεωρούμε τυχαίο $h \in \{0,1\} \Rightarrow$



Θ.δ.ο $\exists\, B \subseteq A : T(B) = h$

δεδομένα: $h: A \to \{0,1\}$

Θέλουμε να βρούμε $B \subseteq A : T(B) = h \Longleftrightarrow \mathcal{J}_B = h$

$B := \{x \in A : h(x) = 1\} \subseteq A$

$A \setminus B = \{x \in A, h(x) = 0\}$

$h = \mathcal{J}_B = T(B)$

↳ Αποδ $h = \mathcal{J}_B \Longleftrightarrow h(y) = \mathcal{J}_B(y)$. $\forall y \in A$

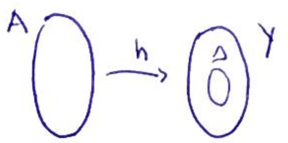
i) $y \in B$: $h(y) = 1$, $\mathcal{J}_B(y) = 1$

ii) $y \notin B$, $y \in A$ $(y \in A \setminus B)$: $h(y) = 0$, $\mathcal{J}_B(y) = 0$

$\Rightarrow h = \mathcal{J}_B \Longrightarrow T$ επί.

"Αντίστροφη Εικόνα"

$h: A \to Y$



$\Delta \subseteq Y$, $h^{-1}(\Delta) = \{x \in A : h(x) \in \{1\}\} = h^{-1}(\{1\})$

<u>Άσκηση</u> Νδο αν $B \cap C = \emptyset \Rightarrow A^{B \cup C} \cong A^B \times A^C$

<u>Λύση</u>

$T: A^{B \cup C} \to A^B \times A^C$. Αρκεί νδο T 1-1 και επί

Έστω $f: B \cup C \to A$

$f/_B : B \to A$, $f/_B(x) = f(x)$ $x \in B$ $\Big\{$ $f/_C : C \to A$, $f/_C(x) = f(x)$ $x \in C$

$T(f)=(f|_B, f|_C)\in (A^B\times A^C)$

T: 1-1

$f_1, f_2 \in A^{B\cup C}$, $f_i: B\cup C \to A$

Έστω $T(f_1)=T(f_2)$ θδο $f_1=f_2$

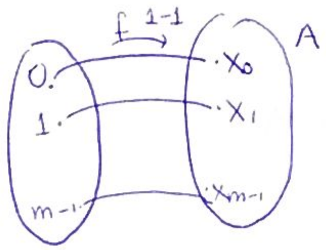
$T(f_1)=T(f_2) \Rightarrow (f_1|_B, f_1|_C) = (f_2|_B, f_2|_C) \Rightarrow f_1|_B = f_2|_B$ και $f_1|_C = f_2|_C \Rightarrow f_1=f_2$

Σπίτι νδο T επί

Ορισμός. $A\neq\emptyset$, A σύνολο. Το A θα λέγεται πεπερασμένο αν $A\cong m$, για κάποιο $m\in\mathbb{N}$.

Το $\emptyset$ είναι πεπερασμένο, αφού $\emptyset\cong 0$

$A\cong m=\{0,1,2,\dots,m-1\}$



$f(k)=x_k$, $k=0,1,\dots,m-1$.

$x_i\neq x_j$

$i\neq j \Rightarrow f(x_i)\neq f(x_j)$ $i,j=\{0,1,\dots,m-1\}$

$A=\{x_0,x_1,\dots,x_{m-1}\}$

$A\cong m^+=\{0,1,\dots,m\}$, $m\in\mathbb{N}$

- Αν $m=0$: $A\cong\{0\}$
- Αν $m=1$: $A\cong\{0,1\}$
- Αν $m=2$: $A\cong\{0,1,2\}$ κοκ

1) $n=m^+=m\cup\{m\}\neq\emptyset=0 \Rightarrow m^+\neq 0$, $\forall m\in\mathbb{N}$

2) $n\in\mathbb{N}$, $n\neq 0 \Rightarrow \exists\, m\in\mathbb{N}: n=m^+$

Απόδειξη του (2)

Έστω $A\subseteq\mathbb{N}$ με $A=\{n\in\mathbb{N}: \exists m\in\mathbb{N}$ ώστε $n=m^+\}\cup\{0\}$

Θα δείξουμε ότι το A είναι επαγωγικό.

$0\in A$, $n\in A \xRightarrow{\text{θδο}} n^+\in A$.

$n \in A \Rightarrow \begin{cases} n=0 & (1) \\ \exists m \in \mathbb{N} : m^+ = n & (2) \end{cases}$

(1) $n=0 \Rightarrow n^+ = 0^+ \Rightarrow m=0 \Rightarrow n^+ \in A$

(2) $n = m^+ \Rightarrow n^+ = (m^+)^+ = (m')^+ \Rightarrow m' = m^+ \Rightarrow n^+ \in A$

Άρα A επαγωγικό

Άρα $A \subseteq \mathbb{N}$ και A επαγωγικό $\Rightarrow$ $A = \mathbb{N}$

$A = \mathbb{N} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι $n \in A$

Άρα $\forall n \neq 0, \exists m \in \mathbb{N} : m^+ = n$

• $A \cong A$

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u> Υποσύνολο πεπερασμένου συνόλου είναι πεπερασμένο σύνολο.

<u>Λήμμα 1</u>

Αν $n \in \mathbb{N}$ και $\beta \subsetneq n \Rightarrow \exists m \in n$ ώστε $\beta \cong m$

<u>Αποδ</u>

$A = \{ n \in \mathbb{N} : \forall \beta \subsetneq n \Rightarrow \exists m \in n : \beta \cong m \}$

Θδο i) $0 \in A$

ii) $n \in A \Rightarrow n^+ \in A$

i) Ισχύει τετριμμένα (φανερό)

ii) Υποθέτουμε ότι $n \in A$. Για να δείξουμε ότι $n^+ \in A$. Θεωρούμε $\beta \subsetneq n^+$ και θα δείξουμε ότι $\exists m \in n^+$ ώστε το $\beta \cong m$.

$n^+ = n \cup \{n\}$

$B \subsetneq n^+$ άρα $\exists k \in n^+$ ώστε $k \notin B$

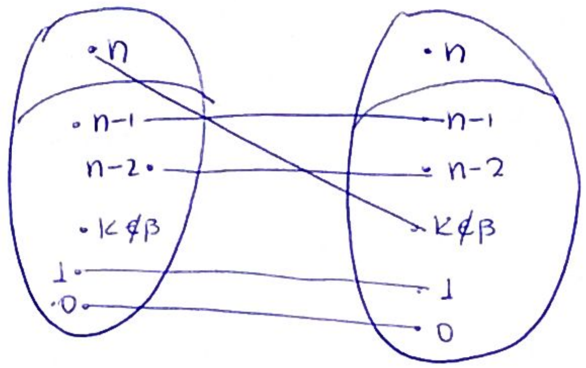
i) $\underrightarrow{K=n}$, $\beta \subseteq n$ — $\beta \subseteq n$ (1), $\beta \subsetneq n$ (2)

1) $\beta = n$. Διαλέγω $m = n$ και παρατηρώ ότι για το m, $\beta \cong m = n = \beta$

$m = n \in n^+ = n \cup \{n\}$

2) $\beta \subsetneq n$, $n \in A \Rightarrow \exists m_1 \in n$, $m_1 \cong \beta$, $m_1 \in n^+$.

ii) $\beta \subsetneq n^+$, $k \in n^+ \setminus \beta$, $k \neq n$ $(k \notin \beta, k \neq n)$, $k \in n^+ \Rightarrow k \in n$, $k \notin \beta$



Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $n \in \beta$.

Κατασκευάζουμε την συνάρτηση

$f : \beta \to n^+$.

$f(n) = k$, $f(x) = x$
$x \in n \cap \beta$, υπόλοιπα x του β.
$x \in \beta, x \neq n$

Η f είναι 1-1 ορισμένη στο β.

<u>Αποδ</u>: $x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

i) $x_1, x_2 \in \beta$, $x_i \neq n$

$f(x_1) = x_1 \neq x_2 = f(x_2)$

ii) $x_1 = n$, $x_2 \in n$ $(x_1 \neq x_2)$

$$\left.\begin{array}{l} f(x_1) = f(n) = k \notin \beta \\ f(x_2) = x_2 \in \beta \end{array}\right\} f(x_1) \neq f(x_2)$$

Άρα f: 1-1.

$f[\beta] = \{ f(y), y \in \beta \} \subseteq n$, αφού $n \notin f(\beta)$

$$\left.\begin{array}{l} n \in \beta,\ k \notin \beta \\ n \notin f[\beta],\ k \in f[\beta] \\ f : \beta \xrightarrow[\text{επι}]{1-1} f[\beta] \end{array}\right\} \Rightarrow \beta \simeq f(\beta) \subseteq n$$

$$f[\beta]\subseteq n \begin{cases} f[\beta]=n \ (1) \\ f[\beta]\subsetneq n \ (2) \end{cases}$$

(1) $\beta \cong f[\beta]=n \Rightarrow \beta\cong n\in n^+$ (φανερά $m=n$)

(2) $n\in A$, $\left.\begin{matrix}\gamma\subsetneq n \Rightarrow \gamma\cong m\in n\subseteq n^+ \\ \quad \| \\ f[\beta]\cong\beta\end{matrix}\right\} \Rightarrow \beta\cong m\in n^+.$

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u>: Αν α πεπερασμένο σύνολο τότε $\beta\subseteq\alpha \Rightarrow \beta$ πεπερασμένο

<u>Αποδ</u>

1) $\beta=\emptyset=0\cong 0\in\mathbb{N}$, $\beta\cong 0\in\mathbb{N} \Rightarrow \beta$ πεπερασμένο

2) $\beta\neq\emptyset$

Αφού α πεπερασμένο $\Rightarrow \exists n\in\mathbb{N}: \alpha\cong n$

$\exists f:\alpha \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} n$

$$\beta\subseteq\alpha \begin{cases} \beta=\alpha \ (1) \\ \beta\subsetneq\alpha \ (2) \end{cases}$$

(1) $\beta=\alpha\cong n \Rightarrow \beta\cong n \Rightarrow \beta$ πεπερασμένο

(2) $\beta\subsetneq\alpha$

$f/\beta:\beta\to f[\beta]\subseteq n$ είναι 1-1 και επί

Άρα $\beta\cong f(\beta)\subseteq n$

Θα δείξουμε ότι $f(\beta)\subsetneq n$

Αν $f(\beta)=n$ $\exists y\in\alpha/\beta$ $(\beta\subsetneq\alpha)$, $k=f(y)\Rightarrow k\in n$

Θα υπάρχει $x\in B$ ώστε $f(x)=k=f(y) \xRightarrow{f\ 1-1} x=y$ όμως $x\in\beta$ και $y\notin\beta$ άρα άτοπο.

Συνεπώς $f(\beta)\subsetneq n$

$$\left.\begin{matrix}\alpha\to n \\ f/\beta:\beta\to f(\beta)\end{matrix}\right\} \xRightarrow{\text{Λήμμα}} \exists m\in n: \left.\begin{matrix}f(\beta)\cong m \\ \beta\cong f(\beta)\end{matrix}\right\} \Rightarrow \beta\cong m \Rightarrow \beta \text{ πεπερασμένο.}$$

ΦΥΛΛΑΔΙΟ 1

Άσκηση 8 ΝΔΟ $\{x : x$ σύνολο$\}$ δεν είναι σύνολο

Λύση

$A = \{x : x$ συνολο$\}$

Αν το A ήταν συνολο $\{x \in A : x \notin x\} = B$ σύνολο από διαχωρ. αξίωμα

Άρα $B \in A$.

Αν $B \in B \Rightarrow B \notin B$
Αν $B \notin B \Rightarrow B \in B$
$B \in B \Longleftrightarrow B \notin B$ άτοπο

Άσκηση 9

ΝΔΟ $\{x : x$ σύνολο $x \cong 1\}$ δεν είναι σύνολο.

Λύση

$\{x : x$ συνολο $x \cong 1\} = \{x : x$ σύνολο με ένα ακριβώς στοιχείο$\}$

$= \{x : x$ μονοσύνολο$\} = A$

A σύνολο.

$A = \{\{a\} : a$ σύνολο$\}$ a: ολα τα σύνολα.

Από το αξίωμα της ένωσης, αφού A σύνολο από σύνολα, ορίζεται η $\bigcup A$ και είναι σύνολο.

$\bigcup A = \{\alpha : \alpha$ σύνολο$\}$ το οποίο είναι σύνολο, άτοπο από παράδοξο Russel.

Άσκηση ΝΔΟ $\{x : x$ σύνολο $x \cong 2\}$ δεν είναι σύνολο.